

ثانية

8. معادلة المعادلة وهي من الشكل:

$$Z^2 W'' + Z W' + (Z^2 - V^2) W = 0 \quad (1)$$

حيث m لا مقدار ثابت.

إن المعادلة بل من هذه النقطة مشتقاتها:

 Z من نقطة شاذة نظاميةمن نقطة شاذة نظامية. لا مفر من ذلك!وسوف نجد الحل لهذه المعادلة (معادلة بيسل) في جدار النقطة $Z=0$

(نقطة شاذة نظامية) كما يلي:

لأن حل المعادلة (1) من الشكل: $W = Z^m \sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^n$ (A); $C_0 \neq 0$ نشتق أولاً هذه المعادلة (*) مرتين بالنسبة إلى Z ونعوض في المعادلة (1)

الأسية (معادلة بيسل) فنجد:

$$(A) \Rightarrow W' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) C_n Z^{n+m-1}$$

$$W'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) C_n Z^{n+m-2}$$

والتعويض في (1) يكون:

$$(1) \Rightarrow Z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) C_n Z^{n+m-2} + Z \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) C_n Z^{n+m-1} + (Z^2 - V^2) \sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^{n+m} = 0$$

$$+ (Z^2 - V^2) \sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^{n+m} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) C_n Z^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) C_n Z^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^{n+m} - V^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^{n+m} = 0$$

ثم يكون من هذا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+m)(n+m-1) C_n + (n+m) C_n - V^2 C_n] Z^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^{n+m+2} = 0$$

ولذلك نعمل أن نساو أقل قوة لـ Z - أي للمصغر (بعد ما $n=0$) فنحصل على:أن قيمة المصغر بالشكل: (بعد التقسيم بـ Z^2) لمزاج المعادلة (المبررة)

$$(m(m-1) + m - V^2) C_0 = 0 \quad ; \quad C_0 \neq 0$$

$$\downarrow \quad m^2 - V^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \pm V}$$

صالح الجدران

آن نضع في الحد الثاني كل $n \geq 2$ ، التناظر إلى 0
والآن بالمطابقة والمساواة نحصل أن: $C_1 = 0$ ما دياً للمبرر
(من أجل n من الحدود الأول).

$$\text{من أجل } n=1 \Rightarrow (1+m) + (1+m) - v^2 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\text{من أجل } n=2 \Rightarrow (2+m) + (2+m) - v^2 \Rightarrow C_2 + C_0 = 0$$

$$(2+m)^2 - v^2 \Rightarrow C_2 + C_0 = 0$$

$$[(2+m+v)(2+m-v)] C_2 + C_0 = 0$$

أو كطاسة مربعة
دفعه:

$$C_2 = \frac{-C_0}{(2+m+v)(2+m-v)} ; v \neq 2$$

الدسور التربيعي العام
حساب المعاملات C_n

من أجل $m = +v$ نجد الفان التوريبي المعاكف لهذه الحالة
(الفرق بين الجذور لا ينبغي أن يكون 2)

$$A \Rightarrow \left[C_n = \frac{-C_{n-2}}{n(n+2v)} \right] ; v \neq 2 ; C_1 = 0$$

وهو يكون حساب المعاملات الأولى:

$$A \Rightarrow n=2 \Rightarrow C_2 = \frac{-C_0}{2(2+2v)}$$

$$n=3 \Rightarrow C_3 = 0 ; C_1 = 0$$

$$n=4 \Rightarrow C_4 = \frac{-C_2}{4(4+2v)} = \frac{-1}{4(4+2v)} \cdot \frac{-1}{2(2+2v)} C_0$$

وهكذا

Subject:

Date:

نلاحظ أن التوافق ذات المولد الزوي تعين بدلالة C_0 أما التوافق ذات المولد
الزوي من مجموعة C_1, C_2, \dots
ومنه بالتالي حسب ما سبق:

$$C_n = \frac{1}{n(n+2v)} \cdot \frac{1}{(n-2)(n-2+2v)} \cdot \frac{1}{(n-4)(n-4+2v)} \dots$$

$$C_0 = \frac{1}{2 \cdot (2+2v)}$$

الآن نفرض أن $n=2\lambda$ (حيث $\lambda = 1, 2, 3, \dots$) (التأكيـد n زوجي) فهي آتية:

$$C_n = C_{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda(2\lambda+2v)} \cdot \frac{1}{2(\lambda-1)2(\lambda-1+v)} \cdot \frac{1}{2(\lambda-2)2(\lambda-2+v)} \dots$$

$$C_0 = \frac{1}{2 \cdot 2(1+v)}$$

(وهي عدد الجداءات في العلاقة السابقة $\lambda = 1$)
ويكون أد: $\lambda = 1, 2, 3, \dots$
$$C_{2\lambda} = (-1)^\lambda \frac{v! C_0}{4^\lambda \lambda! (\lambda+v)!}$$

وهي آتية:

$$(\lambda+v)! = (\lambda+v)(\lambda+v-1) \dots (\lambda+1)v(v-1) \dots 1$$

وبالتالي عندما $m=v$ التوافق المواءم للعادية \square يكون بالتكدي:

$$w_1 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda v! C_0}{4^\lambda \lambda! (\lambda+v)!} 2^{2\lambda}$$

الحد من أعلى القوس الأول (التوافق $m=v$)

وبملاحظة أن $4^\lambda = 2^{2\lambda}$ فالعلاقة الأخيرة تصبح بالتكدي:

$$w_1 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{v! C_0}{\lambda! (\lambda+v)!} \left(\frac{2}{2}\right)^{2\lambda+v} = J_v\left(\frac{2}{2}\right)$$

(حيث $C_0 = \frac{1}{2^{1+v}}$)

وهذا التابع الذي يدعى تابع بل من الرتبة n ($J_n(\frac{z}{2})$)
 ونفس الطريقة نحصل على التالي: $J_n(\frac{z}{2})$ (وذلك من أجل $m=n$)
 ويكون الحالتان $J_n(\frac{z}{2})$ و $J_{-n}(\frac{z}{2})$ مستقلتين خطياً

(مشرطاً إذا لم يكن n عدداً صحيحاً أو صفراً)

وبالتالي الدالة العامة لمعادلة بل في مدار النقطة استاذة التمامية $z=0$

$$w = A J_n(\frac{z}{2}) + B J_{-n}(\frac{z}{2})$$

حيث A و B ثابتان اختياريتان.

9- تحليل الحلول متكاملة

لنفرض أننا نريد تحليل حلول المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى
 لا يمكن الوصول إلى حل للمعادلة كما تم ذكره في قسم 8 من أجل أن تكون
 (أدلة) بالاضافة إلى ذلك هناك طريقة أخرى هي التكامل بالنسبة لـ z

$$u(z) = \int_0^z f(z, t) dt$$

فإن هذه الطريقة ستعادل الوصول إلى حلول من هذه المعادلات التفاضلية

$$w = \int_0^z f(z, t) dt$$

بفرض أن C طريق في المستوى A

ولنبدأ بمعادلة معادلة بل تحليل حلولها متكاملة بتقنية هي من انكسار

$$(a_n z + b_n) w^{(n)} + \dots + (a_1 z + b_1) w' + (a_0 z + b_0) w = 0$$

وهي معادلة من الرتبة n حيث A مجال w مشتقاته هي كبريات حدود
 من الدرجة الأولى في z .

وتسمى المعادلة معادلة لابلا من التكاملية. ولتبحث لهذه المعادلة عن حل من

$$w = \int_C e^{p(z)} dz \quad (1)$$

لتبحث في دالة $p(z)$ وطريق C يجب أن يكون w حلاً للمعادلة (1)

ولنفرض أن $p(z)$ دالة (متكاملة) بحيث يمكن الاشتقاق بالنسبة لـ z

فإن رمز التكامل مشتق العلاقة (2) الأخيرة مرة بالنسبة لـ z

ونبدأ في الحل (لا) نجد:

$$\textcircled{1} \rightarrow \int_0^1 e^{z_1} p(z) [z q(z) + R(z)] dz = 0 \quad \textcircled{2}$$

وذلك يعرف أن:

$$q(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

$$R(z) = b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0$$

وكون المكامل في (2) مشتقاً تماماً:

$$\frac{d}{dz} [e^{z_1} s(z)] = z e^{z_1} s(z) + e^{z_1} s'(z)$$

$$\textcircled{1} \quad s(z) = p(z) q(z) \quad \text{إذا كانت:}$$

$$\textcircled{2} \quad s' = p(z) \cdot R(z) \quad \text{منه ذلك}$$

ولكن هذه الأساليب نستطيع حساب $s(z)$ كما يلي:

$$\frac{s'(z)}{s(z)} = \frac{R(z)}{q(z)} = k_0 + \frac{k_1}{(z - \alpha_1)} + \dots + \frac{k_n}{(z - \alpha_n)} \quad (\text{بتعريف الشواهد})$$

وبفرض أن $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ هي جذور $q(z)$ ذات درجة $q(z)$ لا تقل عن درجة $R(z)$

(تصبح مشتق k_0 و k_1, \dots, k_n مشتق $\frac{k_i}{(z - \alpha_i)}$ من $\frac{R(z)}{q(z)}$)

وسرنا أن هذه الجذور مختلفة بآلة نجد (تسمية المكاملة حواً حواً ونزع اللوغاريتم من الطرفين)

$$s(z) = e^{k_0 z} (z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_n)^{k_n}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow p(z) = \frac{s(z)}{q(z)} = \frac{1}{b_0} e^{k_0 z} (z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_n)^{k_n} \quad \text{والناتج:}$$

$$(q(z) = b_0 (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n))$$

وبالنسبة المعادلة (3) تأخذ المشتق

$$\textcircled{3} \rightarrow \int_0^1 \frac{d}{dz} [e^{z_1} s(z)] dz = [e^{z_1} s(z)]_0^1 = 0$$

وهذا يعني أن العلاقة (3) تكون صلاً للمعادلة (1) إذا أخذنا c على أنه 0

$$[u(z)]_0^1 [e^{z_1} s(z)] = [e^{(z_1 k)} (z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_n)^{k_n}]_0^1 = 0$$

Subject:

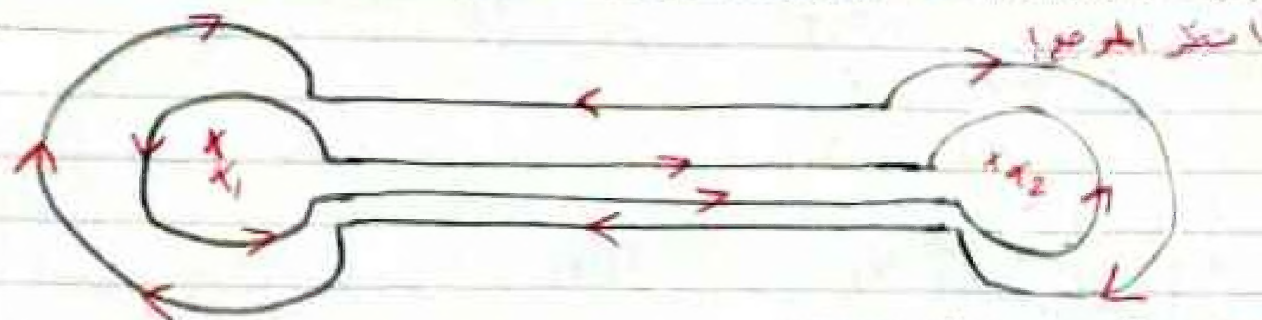
Date:

وتكون العلاقة (2) السابقة بعدة $P(z)$ التابعة هو الحد المطلوب

1- اختيار الطريق:

صياك عدة آد به لاختيار الطريق C يمكن اختيار C طريقاً مغلقاً حيث تعود $P(z)$ إلى نقطة البداية ويحقق الشرط: $[u(z)] = 0$

وغيره انماية يجب ان يكون داخل C احدى النقط z_1, z_2 حيث z_1, z_2, \dots, z_n كما ويمكن اختيار C بمعدة مصافحة كما يات شكل اتي



درة z_1, z_2 لتكن لدينا المعادلة:

$$zw'' + (a+b+z)w' + aw = 0 \quad (1) \quad ; a, b \in \mathbb{R}$$

أو هو الحد بالمثل:

$$w = \int_0^z e^{\int \rho(\zeta) d\zeta} \quad (2)$$

الحل: نشتق العلاقة (2) المزمونة مرتين بالنسبة لـ z ونعوذ من المعادلة (1):

$$(2) \Rightarrow w' = \int_0^z \rho(\zeta) e^{\int \rho(\zeta) d\zeta} d\zeta, \quad w'' = \int_0^z \rho'(\zeta) e^{\int \rho(\zeta) d\zeta} d\zeta$$

وبالمعنى (1) نجد:

$$z \cdot \int_0^z \rho'(\zeta) e^{\int \rho(\zeta) d\zeta} d\zeta + (a+b+z) \int_0^z \rho(\zeta) e^{\int \rho(\zeta) d\zeta} d\zeta + a \int_0^z e^{\int \rho(\zeta) d\zeta} d\zeta = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^z [z\rho'(\zeta) + (a+b+z)\rho(\zeta) + a] e^{\int \rho(\zeta) d\zeta} d\zeta = 0$$

دنه نكتبه كجديد:

$$\int_0^z e^{\int \rho(\zeta) d\zeta} [z\rho'(\zeta) + (a+b)\rho(\zeta) + a] d\zeta = 0$$

حيث يفرض أن:

$$\rho(\zeta) = \zeta^2 + \zeta$$

$$R(\zeta) = (a+b)\zeta + a$$

نكتب العلاقة الآن:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} [2Q(t) + R(t)] dt = 0 \quad (3)$$

ويكون التكامل في (3) متناهياً.

$$\frac{d}{dt} [e^{-\lambda t} S(t)] \quad S(t) = (\lambda^2 + 1) P(t) = Q(t) P(t) \quad \text{وإذا كان:}$$

$$S'(t) = [(a+b)\lambda + a] P(t) = R(t) P(t)$$

دسته يكون:

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{(a+b)\lambda + a}{(\lambda^2 + 1)} \Rightarrow \frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{(a+b)\lambda + a}{\lambda(\lambda^2 + 1)} = \frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda + 1}$$

بالكاملة بعد فصل المتغيرات:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda + 1} \right) d\lambda \xrightarrow{\text{بالكاملة}} \ln S(t) = a \ln \lambda + b \ln (\lambda + 1)$$

$$\Rightarrow \ln S(t) = \ln [\lambda^a (\lambda + 1)^b] \xrightarrow[\text{اللوغاريتم}]{\text{نخرج}} S(t) = \lambda^a (\lambda + 1)^b$$

$$P(t) = \frac{S(t)}{Q(t)} = \frac{\lambda^a (\lambda + 1)^b}{\lambda(\lambda + 1)} \Rightarrow P(t) = \lambda^{a-1} (\lambda + 1)^{b-1} \quad \text{منه:}$$

وعلى هذا فإن الحل في العلاقة (2) يكون:

$$w = \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \lambda^{a-1} (\lambda + 1)^{b-1} d\lambda \right]$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة.

بشرط إذا كان:

$$[e^{-\lambda t} \lambda^a (\lambda + 1)^b]_0 = 0$$

بإذا فرضنا $a > 0$ و $b > 0$ فإن المقدار بين التوسمين

الكبيرين [في العلاقة الأخيرة] يندرج عند $\lambda = 0$ و $\lambda = \infty$

وإذا كان $a > 0$ فإن هذا المقدار يندرج من أجل $\lambda = 0$.

Subject: _____

Date: _____



أما إذا كان $Z < 0$ فإنه ينعدم من أجل $z = 0$ وهكذا ذهب إلى طول المماس
يملك أن يختار بينا c فترة من المحاور الحقيقي وذلك على المماس الثاني
إذا كان $a > 0$ و $b > 0$ فيمكن اختيار c الفترة $(0, a)$
إذا كان $a > 0$ و $Z > 0$ فيمكن اختيار c الفترة $(0, a)$
أما إذا كان $a < 0$ و $b < 0$ و $Z > 0$ فلا توجد أي قطعة من المحاور
الحقيقي يمكن اختيارها بالطريقة c .

سؤال (دو ملونة):

أو هو الد المعادلة ينفذ الطريقة:

$$Z w'' + (2v+1) w' + Z w = 0$$

$$w = \int_0^z e^{\frac{1}{2}t^2} (t^2+1)^{v-\frac{1}{2}} dt$$

$$\left[e^{\frac{1}{2}t^2} (t^2+1)^{v-\frac{1}{2}} \right]_0^z = 0$$

هنا لا نقدر ثابت،
ويكون الحد
بشرط إذا تحقق: